

ETUDE DES EQUILIBRES THERMIQUES D'UN FILAMENT CHAUFFE PAR EFFET JOULE

M. NIVOIT, J. L. PROFIZI et D. PAULMIER

Laboratoire d'Etudes et de Recherches en Mécanique et Energétique des Surfaces,
 2 rue de la Citadelle, 54000 Nancy, France

(Reçu le 5 décembre 1980)

Résumé — Des critères suffisants d'unicité sont proposés afin de prévoir les conditions sous lesquelles un filament chauffé par effet Joule ne peut présenter qu'un seul état d'équilibre. L'aspect restrictif de ces critères est jugé par comparaison à des résultats numériques; le filament rayonnant est plus particulièrement étudié.

NOMENCLATURE

x ,	abscisse suivant l'axe du filament;
T ,	température du conducteur au point d'abscisse x ;
s ,	section droite du filament;
p ,	périmètre de la section;
I ,	intensité du courant;
$a(T)$,	conductibilité thermique du métal;
$\rho(T)$,	résistivité électrique du métal;
$c(T)$,	chaleur spécifique du métal;
m ,	masse volumique du métal;
$w(T)$,	puissance échangée par l'unité de surface latérale du conducteur avec le milieu ambiant;
t ,	temps;
T_1 ,	température des amenées de courant et du milieu extérieur;
l ,	demi-longueur du filament;
σ ,	constante de Stefan;
$\varepsilon(T)$,	émissivité totale hémisphérique du métal;
r ,	rayon du filament de section circulaire;
θ ,	pseudo-température définie par (3);
$\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d$,	pseudo-températures définies par la Fig. 6;
$f(\theta)$,	fonction définie par (5);
$g(\theta)$,	fonction définie par (6);
θ_m ,	racine de $f(\theta) = 0$;
L ,	fonction définie par (11);
L_1, L_2 ,	extrémums de L ;
J ,	paramètre définie par (12);
$F(\theta)$,	fonction définie par (27);
$f'(\theta)$,	dérivée par rapport à θ de $f(\theta)$;
$F'(\theta)$,	dérivée par rapport à θ de $F(\theta)$;
$W'(\theta)$,	dérivée par rapport à θ de $W(\theta)$;
$\rho'(\theta)$,	dérivée par rapport à θ de $\rho(\theta)$.

1. INTRODUCTION

UN FILAMENT chauffé par effet Joule peut présenter, sous certaines conditions, différents profils de températures correspondant à de multiples états stationnaires. Ce phénomène qui perturbe fortement ces distributions des températures est souvent gênant

pour qui veut traiter les problèmes concernant les transferts d'énergie entre un conducteur et le milieu dans lequel il baigne. Busch [1] puis Farkas et Rowley [2] ont abordé ce sujet mais leurs études sont trop restrictives. Nivoit et Paulmier [3] dénombrent les états d'équilibres accessibles à un fil, mais là encore l'étude est incomplète, en particulier pour les filaments rayonnants.

Pour des systèmes chimiques, particules catalytiques par exemple, Aris [4], Luss [5] et Luss et Ervin [6] ont entrepris des études très intéressantes sur des phénomènes comparables.

Notre but est de présenter des méthodes simples qui, à partir de l'étude des fonctions traduisant le comportement du filament et l'évacuation latérale de la chaleur, permettent de prévoir l'unicité de l'état stationnaire accessible au filament. Le chercheur saura alors se placer dans les conditions expérimentales les plus intéressantes.

2. MODELE MATHEMATIQUE

2.1. La distribution des températures le long d'un conducteur de faible section chauffé par effet Joule est régie, lorsque l'influence de l'effet Thomson est négligeable, par l'équation différentielle classique [7]

$$-s \frac{\partial}{\partial x} \left[a(t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + pw(T) - \rho(T) \frac{I^2}{s} + msc(T) \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Les différents termes représentent respectivement la perte d'énergie vers les extrémités par conduction le long du fil, la perte d'énergie par la surface latérale du conducteur, l'effet Joule et l'inertie thermique interne du filament.

Les amenées de courant étant maintenues à température constante, les conditions aux limites et les conditions initiales sont les suivantes

$$T = T_1 \text{ pour } x = \pm 1 \quad \forall t \quad (1a)$$

$$T = T_1 \text{ pour } t = 0 \quad \forall x \quad (1b)$$

Dans le cas du rayonnement pur, l'énergie échangée

avec le milieu extérieur est

$$W(T) = \sigma \varepsilon(T)(T^4 - T_1^4) \tag{2}$$

2.2. Le changement de variable suivant

$$\theta = \int_{T_1}^T \frac{a(T)}{a(T_1)} dT \tag{3}$$

qui introduit la notion de pseudo-température θ permet une étude aisée du problème. L'équation différentielle (1) et les conditions (1a) et (1b) deviennent

$$-sa(0) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + pW(\theta)$$

$$-\rho(\theta) \frac{I^2}{s} + msc(\theta) \frac{a(0)}{a(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$$\theta = 0 \text{ pour } x = \pm l \quad \forall t \tag{4a}$$

$$\theta = 0 \text{ pour } t = 0 \quad \forall x. \tag{4b}$$

Si on pose

$$f(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{s^2 a(0)} \left[I^2 - \frac{pW(\theta)s}{\rho(\theta)} \right] \tag{5}$$

$$g(\theta) = m \frac{c(\theta)}{a(\theta)} \tag{6}$$

la relation (4) s'écrit

$$-\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - f(\theta) + g(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

La distribution stationnaire des pseudo-températures est alors donnée par l'équation

$$-\frac{d^2 \theta}{dx^2} = f(\theta). \tag{8}$$

Les conditions aux limites sont

$$\theta = 0 \text{ pour } x = \pm l \tag{8a}$$

2.3. La fonction $f(\theta)$ satisfait les conditions suivantes: $f(\theta)$ est continue et pourvue d'une dérivée continue pour $\theta \geq 0$; $f(\theta) > 0$ pour $0 \leq \theta < \theta_m$ et $f(\theta) \leq 0$ pour $\theta \geq \theta_m$; θ_m est la racine de $f(\theta)$ et représente la pseudo-température du système si l'on néglige les pertes de chaleur par les extrémités du conducteur. La Figure 1 donne un exemple.

2.4. Bien que certains résultats énoncés dans les chapitres suivants puissent être démontrés sans faire intervenir la notion de pseudo-température, pour plus de clarté nous nous contenterons d'étudier l'équation (7). De toute façon, la relation $\theta(T)$ est connue: la Fig. 2 en donne un exemple dans le cas du nickel, la température extérieure étant celle de l'azote liquide, 77 K.

3. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'UNICITE

3.1. Le calcul numérique permet de déterminer le nombre d'états stationnaires accessibles au filament en fonction des paramètres s, p, I, T_1 et l .

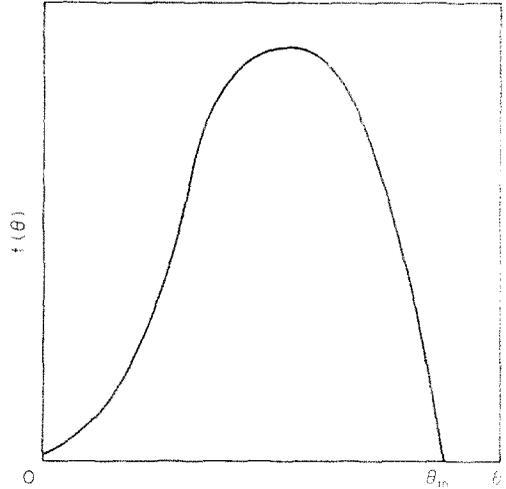


FIG. 1. Principales propriétés de $f(\theta)$.

L'intégration de l'équation (8) conduit au profil des pseudo-températures

$$x = \int_0^{\theta(0)} \left\{ 2 \int_0^{\theta(0)} f(u) du \right\}^{-1/2} d\theta \tag{9}$$

expression dans laquelle $\theta(0)$ représente la pseudo-température au point d'abscisse zéro, milieu du conducteur; $\theta(0)$ vérifie la relation

$$l = \int_0^{\theta(0)} \left\{ 2 \int_0^{\theta(0)} f(u) du \right\}^{-1/2} d\theta. \tag{10}$$

Si on pose

$$L = l \left[\frac{p}{s} \right]^{1/2} \tag{11}$$

$$J = \frac{I}{(ps)^{1/2}} \tag{12}$$

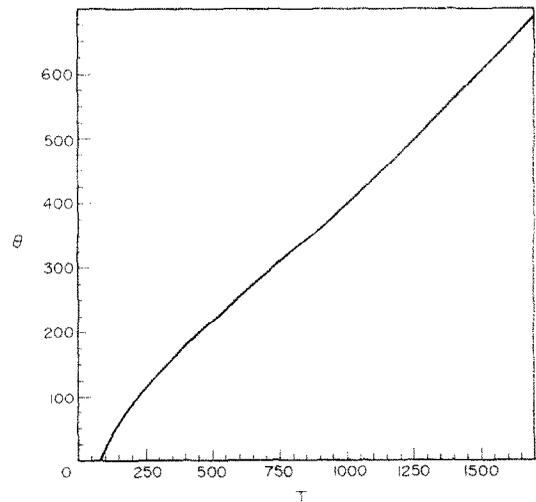


FIG. 2. θ [K] fonction de T [K]: cas du nickel, $T_1 = 77$ K.

l'équation (10) devient

$$L = \int_0^{\theta(0)} \left\{ 2 \int_{\theta}^{\theta(0)} \frac{\rho(u)}{a(0)} \left[J^2 - \frac{W(u)}{\rho(u)} \right] du \right\}^{-1/2} d\theta. \tag{13}$$

Cette relation permet de calculer L en fonction de $\theta(0)$: la méthode numérique employée assure une précision de 10^{-4} . Les conditions nécessaires et suffisantes d'unicité sont déduites de ces calculs et ne dépendent plus que des paramètres J , T_1 et L .

3.2. Les Figs. 3, 4 et 5 donnent différents exemples dans le cas d'un filament de nickel de section circulaire de rayon r . Les résultats de l'intégration de l'équation (13) sont représentés pour différentes valeurs de J par un réseau $L[\theta(0)]$.

Le cas présenté Fig. 3 correspondant à une température extérieure de 77 K, montre que quelle que soit L , un seul état stationnaire apparaît.

Le cas représenté Fig. 4, à la même température extérieure, montre que l'unicité n'est possible que si $L > L_2$ ou $L < L_1$. La Fig. 5 donne les courbes $L_1(J)$ et $L_2(J)$ pour différentes valeurs de T_1 : en tout point choisi à l'extérieur des zones hachurées le filament ne peut présenter qu'un seul état stationnaire.

3.3. La détermination de chacune de ces courbes nécessite des calculs spécifiques; de plus le temps de calcul augmente avec la complexité du terme de dissipation latérale de chaleur (présence de la conduction gazeuse par exemple). Il est donc intéressant de rechercher des conditions suffisantes d'unicité liées à la forme de l'équation et donc d'une portée plus générale. L'espect restrictif de ces conditions d'unicité sera jugé par comparaison aux résultats numériques précédents.

Deux types de critères peuvent être développés: l'un donne une valeur limite à l'intensité du courant au-dessous de laquelle l'unicité est assurée quelle que soit la longueur du filament; l'autre donne les domaines où la longueur doit être choisie pour que l'unicité soit assurée, l'intensité étant fixée.

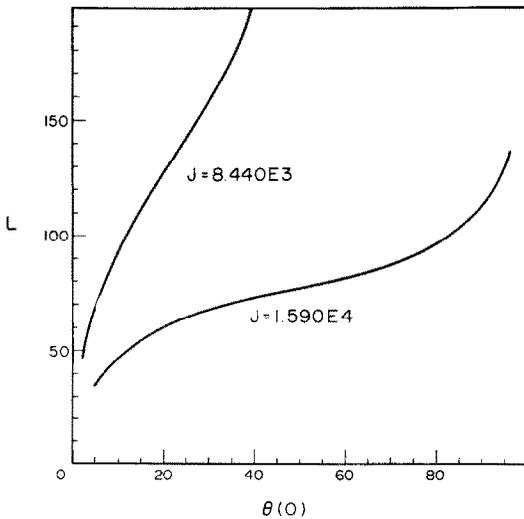


FIG. 3. $L [m^{1/2}]$ fonction de $\theta(0) [K]$: cas du nickel, $T_1 = 77 K$.

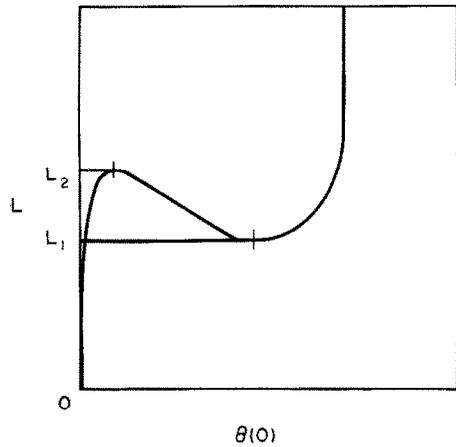
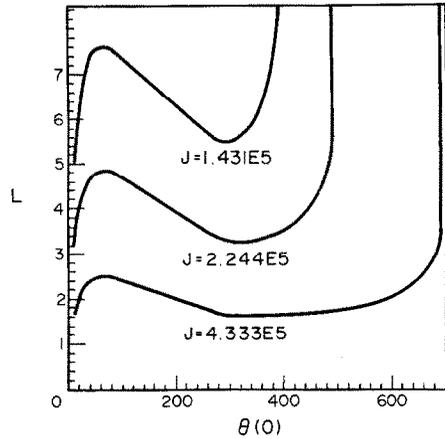


FIG. 4. $L [m^{1/2}]$ fonction de $\theta(0) [K]$: cas du nickel, $T_1 = 77 K$.

4. CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE INDEPENDANTE DE LA LONGUEUR: PREMIER CRITERE

4.1. La méthode classique consiste à supposer que l'équation (8) admet deux solutions θ_1 et θ_2 distinctes et à montrer que leur différence $u = \theta_2 - \theta_1$ vérifie une équation n'admettant que la solution nulle; u vérifie

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f'(\theta) \text{ avec } \theta(x) \in [\theta_1(x), \theta_2(x)] \tag{14}$$

$$u = 0 \text{ pour } x = \pm 1. \tag{14a}$$

L'équation (14) n'admet que la solution nulle [8] si $f'(\theta) \leq 0$ pour $0 \leq \theta(x) \leq \theta_2(0)$ de sorte qu'une condition suffisante d'unicité indépendante de la longueur s'écrit

$$f'(\theta) \leq 0 \text{ pour } 0 \leq \theta \leq \theta_m. \tag{15}$$

Suivant l'expression (5) de $f(\theta)$, si l'on admet que $\rho'(\theta) > 0$, ce qui est le cas le plus fréquent en particulier pour les métaux, le critère précédent devient

$$J^2 \leq \inf \left[\frac{w'(\theta)}{\rho'(\theta)} \right] \text{ pour } \theta \in [0, \theta_m] \tag{16}$$

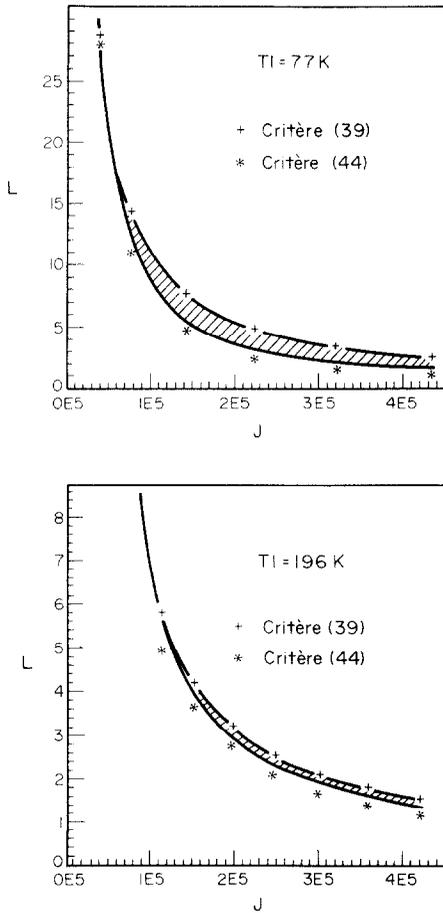


FIG. 5. L_1 [$m^{1/2}$], L_2 [$m^{1/2}$] fonction de J [$A m^{-3/2}$]: cas du nickel.

ou encore

$$\frac{w(\theta_m)}{\rho(\theta_m)} \leq \inf \left[\frac{w'(\theta)}{\rho'(\theta)} \right] \text{ pour } \theta \in [0, \theta_m]. \quad (17)$$

Les calculs ont montré dans tous les cas que nous avons rencontrés que

$$\inf \left[\frac{w'(\theta)}{\rho'(\theta)} \right] = \frac{w'(0)}{\rho'(0)} \text{ pour } \theta \in [0, \theta_m].$$

La condition (15) prend donc la forme suivante

$$J^2 < \frac{W'(0)}{\rho'(0)}. \quad (18)$$

4.2. En exprimant l'émissivité $\varepsilon(T)$ et la résistivité électrique $\rho(T)$ par les lois couramment utilisées

$$\varepsilon(T) = a + bT \text{ pour } T \in [T_1, T_m] \quad (19)$$

$$\rho(T) = c_i + d_i T + e_i T^2 + f_i T^3 \text{ pour } T \in [T_i, T_{i+1}] \quad (20)$$

la relation (16) devient

$$J^2 \leq \frac{4\sigma T_1^3(a + bT_1)}{d_1 + 2e_1 T_1 + 3f_1 T_1^2}. \quad (21)$$

Dans le cas d'un filament de nickel, de section circulaire de rayon r , la température extérieure étant de 77 K, le critère d'unicité s'écrit

$$J < 5,935 \cdot 10^3 A m^{-3/2}. \quad (22)$$

Il est évident, que comparée à la valeur calculée

$$J \leq 3,804 \cdot 10^4 A m^{-3/2} \quad (23)$$

la condition (21) est trop restrictive. Il est alors souhaitable de rechercher une condition plus proche de la limite réelle.

5. CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE INDEPENDANTE DE LA LONGUEUR: DEUXIEME CRITERE

5.1. La méthode consiste encore à supposer que l'équation (8) admet deux solutions distinctes θ_1 et θ_2

$$-\frac{d^2\theta_1}{dx^2} = f(\theta_1) \quad (24)$$

$$\theta_1 = 0 \text{ pour } x = \pm 1 \quad (24a)$$

$$-\frac{d^2\theta_2}{dx^2} = f(\theta_2) \quad (25)$$

$$\theta_2 = 0 \text{ pour } x = \pm 1. \quad (25a)$$

Après avoir multiplié les équations (24) et (25) respectivement par θ_2 et θ_1 , l'application du théorème de Green conduit à

$$\int_0^1 \left\{ \theta_2 \left[\frac{d^2\theta_1}{dx^2} + f(\theta_1) \right] - \theta_1 \left[\frac{d^2\theta_2}{dx^2} + f(\theta_2) \right] \right\} dx - \int_0^1 \{ \theta_2 f(\theta_1) - \theta_1 f(\theta_2) \} dx = 0. \quad (26)$$

En posant

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{\theta} \quad (27)$$

l'équation (26) devient

$$\int_0^1 [F(\theta_1) - F(\theta_2)] \theta_1 \theta_2 dx = 0. \quad (28)$$

Il peut être démontré que deux profils de pseudo-températures ne peuvent se couper [5] de sorte que l'on peut choisir $0 < \theta_1(x) < \theta_2(x)$ pour $0 < x < 1$. L'équation (28) ne peut alors être satisfaite si $F(\theta)$ est monotone pour $0 \leq \theta \leq \theta_2(0)$; une condition suffisante d'unicité indépendante de la longueur s'écrit

$$F'(\theta) \leq 0 \text{ pour } \theta \in [0, \theta_m]. \quad (29)$$

Suivant l'expression (5) de $f(\theta)$, le critère précédent devient

$$J^2 < \inf \left[\frac{\theta W'(\theta) - W(\theta)}{\theta \rho'(\theta) - \rho(\theta)} \right] \text{ pour } \theta \in]\theta_w, \theta_v[\quad (30)$$

θ_w et θ_v définissent les limites du domaine où les expressions $\theta w'(\theta) - w(\theta)$ et $\theta \rho'(\theta) - \rho(\theta)$ sont toutes

deux positives.

Remarque: la condition (29) est moins restrictive que le critère (15) puisque $f'(\theta) \leq 0$ implique $F'(\theta) \leq 0$.

5.2. En représentant la conductibilité thermique $a(T)$ par la loi suivante couramment utilisée

$$a(T) = m_j T^{n_j} \text{ pour } T \in [T_j, T_{j+1}] \quad (31)$$

la relation (29) devient

$$J^2 < \inf \frac{\theta \sigma (5bT^4 + 4aT^3 - bT_1^4) \frac{m_1 T_1^{n_1}}{m_j T^{n_j}} - \sigma (a + bT)(T^4 - T_1^4)}{\theta (d_i + 2e_i T + 3f_i T^2) \frac{m_1 T_1^{n_1}}{m_j T^{n_j}} - (c_i + d_i T + e_i T^2 + f_i T^3)} \quad (32)$$

pour $T_u < T < T_v$; θ est défini par l'équation (3).

Dans le cas d'un filament de nickel, de section circulaire de rayon r , la température extérieure étant de 77 K, le critère d'unicité s'écrit

$$J < 3,556 \cdot 10^4 \text{ A m}^{-3/2}. \quad (33)$$

Comparée à la valeur exacte (23), la condition précédente est intéressante puisque nettement moins restrictive que la relation (22).

6. CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE PERMETTANT DE DETERMINER UNE LONGUEUR MINIMALE DU FIL; RECHERCHE D'UNE BORNE SUPERIEURE DE L_2

6.1. Lorsque le critère (29) n'est pas vérifié, la fonction $F(\theta)$ a l'allure représentée par la Fig. 6: en particulier, il existe un minimum local en θ_a et un maximum local en θ_b . Cette allure est celle que l'on rencontre dans le cas du rayonnement auquel on limite notre étude.

6.2. La méthode consiste toujours à supposer que l'équation (8) admet deux solutions distinctes θ_1 et θ_2 . On démontre [5] que ces deux solutions ne peuvent être telles que $\theta_a < \theta_1(0) < \theta_2(0) < \theta_m$.

Une condition suffisante d'unicité sera alors d'imposer à toute solution $\theta(x)$ la propriété $\theta_a < \theta(0) < \theta_m$.

Comparons les solutions θ et v des équations suivantes

$$-\frac{d^2 \theta}{dx^2} = f(\theta) \quad (34)$$

$$\theta = 0 \text{ pour } x = \pm 1 \quad (34a)$$

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{41^2} v \quad (35)$$

$$v = 0 \text{ pour } x = \pm 1. \quad (35a)$$

Après avoir multiplié les équations (34) et (35) respectivement par v et θ , l'application du théorème de Green conduit à

$$\int_0^1 \left[F(\theta) - \frac{\pi^2}{41^2} \right] v \theta dx = 0. \quad (36)$$

Sachant que $v(x) \geq 0$ et $\theta(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, la relation (36) ne peut être satisfaite que si

$$1 < \frac{\pi}{2[\inf F(\theta)]^{1/2}} \text{ pour } \theta \in [0, \theta(0)]. \quad (37)$$

Si on choisit

$$1 > \frac{\pi}{2[F(\theta_a)]^{1/2}} = \frac{\pi}{2[F(\theta_b)]^{1/2}} \quad (38)$$

il est évident que $\inf F(\theta) < F(\theta_a)$ pour $0 \leq \theta \leq \theta(0)$ et qu'alors $\theta_a < \theta(0) < \theta_m$. L'inégalité (38) est donc une condition suffisante d'unicité.

Cette relation s'écrit

$$L > \frac{\pi}{2 \left[\frac{s}{p} F(\theta_a) \right]^{1/2}}. \quad (39)$$

6.3. Dans le cas d'un filament de nickel, de section circulaire de rayon r , la température extérieure étant de 77 K, la Fig. 5 et le tableau suivant permettent de juger l'aspect restrictif du critère (39) par rapport à la valeur calculée L_2 .

J_1 A m ^{-3/2}	$L_{2,2}$ m ^{1/2}	Critère (39)	$L_{1,1}$ m ^{1/2}	Critère (44)
3,948 · 10 ⁴	28,41	28,64	28,40	28,10
7,707 · 10 ⁴	14,18	14,34	12,57	11,07
1,431 · 10 ⁵	7,61	7,68	5,49	4,75
2,244 · 10 ⁵	4,84	4,89	3,28	2,36
3,210 · 10 ⁵	3,38	3,42	2,22	1,56
4,333 · 10 ⁵	2,50	2,53	1,63	1,12

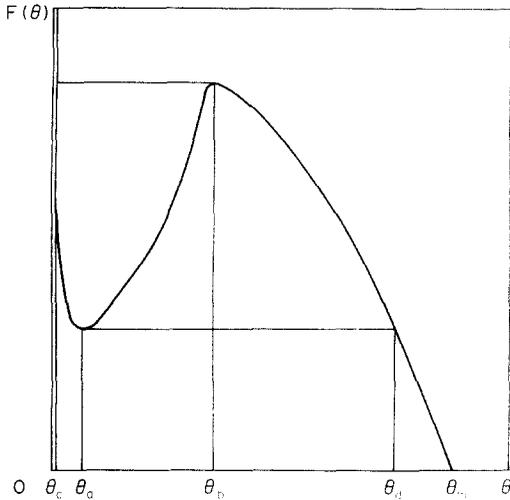
Il faut remarquer que l'accord est excellent dans tous les cas étudiés.

7. CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE PERMETTANT DE DETERMINER UNE LONGUEUR MAXIMALE DU FIL; RECHERCHE D'UNE BORNE INFERIEURE DE L_1

7.1. Supposons que l'équation (8) admette deux solutions distinctes θ_1 et θ_2 . La méthode consiste à les comparer à v , solution de l'équation

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{41^2} v \quad (40)$$

$$v = 0 \text{ pour } x = \pm 1. \quad (40a)$$

FIG. 6. Principales propriétés de $F(\theta)$.

L'application du théorème de Green conduit à

$$\int_0^1 \left\{ [f(\theta_2) - f(\theta_1)] - [\theta_2 - \theta_1] \frac{\pi}{41^2} \right\} v \, dx = 0 \quad (41)$$

ou encore, si $\theta(x) \in]\theta_1(x), \theta_2(x)[$

$$\int_0^1 \left[\frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{\pi^2}{41^2} \right] (\theta_2 - \theta_1) v \, dx = \int_0^1 \left[f'(\theta) - \frac{\pi^2}{41^2} \right] (\theta_2 - \theta_1) v \, dx = 0. \quad (42)$$

Puisque $0 < \theta_1(x) < \theta_2(x)$ pour $0 < x < 1$, l'équation (42) ne peut être satisfaite si $f'(\theta) - (\pi^2/41^2)$ garde un signe constant pour $0 < \theta < \theta_2(0)$.

Une condition suffisante d'unicité est alors

$$1 < \frac{\pi}{2[\sup f'(\theta)]^{1/2}} \quad \text{pour } \theta \in [0, \theta_m] \quad (43)$$

ou encore

$$L < \frac{\pi}{2 \left[\frac{s}{p} \sup f'(\theta) \right]^{1/2}} \quad \text{pour } \theta \in [0, \theta_m]. \quad (44)$$

7.2. Dans le cas d'un filament de nickel, de section circulaire de rayon r , la température extérieure étant de 77 K, la Fig. 5 et le tableau précédemment permettent de juger l'aspect restrictif du critère (44) par rapport à la valeur exacte L_1 .

Il faut remarquer que l'accord est bon dans tous les cas étudiés.

8. CONCLUSIONS

Ce travail montre qu'un filament rayonnant chauffé par effet Joule peut présenter, sous certaines conditions, trois états stationnaires; l'étude de leur stabilité montrerait que l'état intermédiaire est instable et qu'alors deux états sont accessibles réellement. Les modèles 'filament infini' [1] et 'filament semi infini' [3] ne prévoyaient qu'un seul état stationnaire.

Les conditions d'unicité développées permettent de choisir, à partir de calculs très simples, les conditions expérimentales qui éliminent ce phénomène, gênant pour beaucoup.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Busch, Über die Erwärmung von Drähten in verdünnten Gasen durch den elektrischen Strom, *Ann. Physik* **64**, 401-450 (1921).
2. A. Farkas et H. H. Rowley, Über die Wärmeabgabe und Temperaturverteilung von elektrischen erhitzten Drähten, *Z. Physikal. Chem.* **22B**, 335-343 (1933).
3. M. Nivoit et D. Paulmier, Analyse générale des distributions des températures le long d'un filament semi-infini chauffé par effet Joule, *Lett. Heat Mass Transfer* **3**, 217-226 (1976).
4. R. Aris, On stability criteria of chemical reaction engineering, *Chem. Engng Sci.* **24**, 149-169 (1968).
5. D. Luss, Uniqueness criteria for lumped and distributed parameter chemically reacting systems, *Chem. Engng Sci.* **26**, 1713-1721 (1971).
6. D. Luss et M. A. Ervin, The influence of end effects on the behavior and stability of catalytic wires, *Chem. Engng Sci.* **27**, 315-327 (1972).
7. H. S. Carslaw et J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, p. 150. Clarendon Press, Oxford (1959).
8. R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, p. 320. Interscience (1962).

THERMAL EQUILIBRIUM OF A WIRE DUE TO JOULE HEATING

Abstract—Sufficient criteria of uniqueness are proposed, in order to predict the conditions under which a filament, heated by Joule effect, can reach only one steady-state. The restrictive aspect of these criteria is appreciated by comparison with calculation results; the considered case is the radiative wire.

STUDIE ZUM THERMISCHEN GLEICHGEWICHT EINES
STROMDURCHFLOSSENEN DRAHTES

Zusammenfassung—Wir entwickeln hinreichende Bedingungen, unter denen ein stromdurchflossener Draht einen einzigen Gleichgewichtszustand, einnimmt. Der einschränkende Charakter dieser Bedingungen, verglichen mit Ergebnissen numerischer Rechnungen – unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung – wird aufgezeigt.

ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ ОМИЧЕСКИ НАГРЕВАЕМОЙ НИТИ

Аннотация — Сформулированы достаточные условия однозначности, при которых нить, нагреваемая за счет джоулевого тепловыделения, может достичь только одного стационарного состояния. Область применимости этих условий, в частности, для излучающей нити, устанавливается сравнением с результатами расчета.